Лекция 6_Гармониялық координаттардағы Керр метрикасы

Дәрісте гармониялық координаттардағы Керр метрикасына қатысты негізгі ұғымдарды және Керр метрикасының ғарыштық гравитация мен қара құрдымдарды түсінуімізге қалай ықпал ететінін баяндаймыз.

1. 1915 жылы Альберт Эйнштейн гравитация теориясын ұсынды, ол ЖСТ ретінде белгілі болды. Ол гравитацияны масса мен энергияның әсерінен кеңістік-уақыттың иілуі ретінде сипаттайды.
2. Керр метрикасы айналмалы қара құрдымдарды сипаттайтын Эйнштейн теңдеулерінің шешімі болып табылады. Оны 1963 жылы Рой Керр ұсынған. Керр метрикасының көптеген маңызды қасиеттері бар және қара құрдымдарды, әсіресе айналу кезінде, зерттеуде өте танымал теория болып табылады. Сондай ақ, Керр метрикасы және гармониялық координаталары қара құрдымдарды, олардың айналуын және оларды қоршаған гравитациялық динамикасын белсенді зерттеуде қолданылады.
3. Гравитация теориясындағы координаттар: кеңістіктік координаталарды түсіну гравитация физикасында шешуші рөл атқарады. Гармониялық координаттар - Эйнштейн теңдеулерін шешуде кейбір артықшылықтарға ие координаттардың ерекше түрі.
4. Гармониялық теңдеулер: Гармониялық координаттар Эйнштейн теңдеулерін гармониялық теңдеулер деп аталатын арнайы формада жазуға мүмкіндік береді. Бұл теңдеулер кейбір математикалық артықшылықтарға ие және гравитациялық құбылыстарды талдауда тиімді болып табылады. Бұл ұғымдардың астрофизикада кең қолданбалы мүмкіндіктері бар және аккреция дискілері мен квазарлар сияқты ғарыштық нысандарды жақсырақ түсінуге көмектеседі.

Керр метрикасының пішіні Бойер-Линдквист координаттары арқылы берілген

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu R}{R^2 + a^2\cos^2\Theta}\right)c^2dt^2 - \frac{R^2 + a^2 co\,s^2\,\Theta}{R^2 - 2\mu R + a^2}dR^2 -$$

$$-(R^2 + a^2\cos^2\Theta)d\Theta^2 + \frac{4\mu\,Ra\,sin^2\Theta}{R^2 + a^2\cos^2\Theta}dtd\phi -$$

$$-\left(R^2 + a^2 + 2\mu\frac{Ra^2\sin^2\Theta}{R^2 + a^2\cos^2\Theta}\right)\sin^2\Theta\,d\phi^2, \qquad (1)$$

мұндағы μ және a орталық өрістің m_0 массасына және J бұрыштық импульсіне келесідей байланысты

$$\mu = \frac{Gm_0}{c^2}, \quad a = \frac{J}{m_0 c}, \tag{2}$$

мұндағы G – гравитациялық тұрақты, c – жарық жылдамдығы. Бұл дәрісте төмендегі шарттарды қанағаттандыратын x^μ гармониялық координаталарды енгізу ыңғайлы

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) = 0, \tag{3}$$

мұндағы $g^{\mu\nu}$ - қарама-қарсы нұсқадағы метрикалық тензор және $g^{\mu\nu}$ - анықтауышы [1]. Сонымен қатар, гармониялық координат шарттарын Кристоффель $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ символдары арқылы келесідей көрсетуге болады.

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, g^{\nu\lambda} = 0, \tag{4}$$

практикалық тұрғыдан қолайлы болып табылады [2]. Гармониялық координаттар ЖСТ көптеген мәселелері үшін маңызды [1]. Мысалы, олар кеңістік-уақыттың гравитациялық өріс көзінен үлкен қашықтықта біртекті және изотропты деп санауға болатын жағдайлармен байланысты. Өз кезегінде, кеңістік-уақыттың біртектілігі мен изотроптылығының салдары шын мәнінде қозғалыстың бірінші интегралдары болып табылатын энергияның, импульстің және бұрыштық импульстің сақталуы болып табылады. Адиабаталық теорияда қолдану үшін Керр метрикасы (1) Ньютоннан кейінгі жуықтаудағыдай $\frac{1}{c^2}$ дәрежелер қатарында кеңейтілген. Сонымен қатар, келесі координаталық түрлендіру Бойер-Линдквист координаттарын гармонияалық координаталармен былай байланыстырады [3]

$$R = r + \frac{1}{c^2}\left(Gm_0 - \frac{J^2 \sin^2\theta}{2m_0^2 r}\right), \tag{5}$$

$$\Theta = \theta - \frac{J^2 \sin^2\theta \cos\theta}{2c^2 m_0^2 r^2}. \tag{6}$$

Демек, гармониялық координаталардағы Керр метрикасы шамамен

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2Gm_0}{c^2 r} + \frac{2G^2 m_0^2}{c^4 r^2} + \frac{2GJ^2}{c^4 m_0 r^3} P_2(cos\theta)\right) c^2 dt^2 -$$

$$-\left(1+\frac{2Gm_0}{c^2r}\right)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\phi^2)+$$

$$+\frac{4GJ}{c^2r}\sin^2\theta\, dtd\phi, \qquad (7)$$

мұндағы $P_2(cos\theta)=\frac{3\,cos^2\theta-1}{2}$ Лежандр полиномы болып табылады.

Керр метрикасының (7) гармониялық түрі релятивистік түзетулерді нақты анықтау үшін қажет. Осылайша, метрикалық тензордың уақытша құрамдас бөлігінде алғашқы екі термин Ньютон теориясына сілтеме жасайды және соңғы екі термин $\frac{1}{c^2}$ пропорционал болғандықтан тек қана релятивистік болып табылады. Сонымен қатар, $\frac{1}{c^2}$ пропорционалды терминдер метрикалық тензордың кеңістіктік және аралас құрамдас бөліктерінде де кездеседі.

Біз метриканың (7) $\frac{1}{c^2}$ жуықтауындағы гармониялық координаттар шартын орындайтынын тексердік. Әртүрлі математикалық әдістерді қолдану арқылы алынған гармониялық координаттардағы Керр метрикасына бірнеше сілтемелер бар [4-9].

Бірінші ретті пост-ньютондық (1PN) жуықтауда метрикалық тензордың құрамдас бөліктері жақындаудың әртүрлі реттері болатынын түсіндіру керек. Мысалы,

$$g_{00}\sim\frac{1}{c^4}+O\left(\frac{1}{c^6}\right),\quad g_{0j}\sim\frac{1}{c^3}+O\left(\frac{1}{c^5}\right),\quad g_{jk}\sim\frac{1}{c^2}+O\left(\frac{1}{c^4}\right). \qquad (8)$$

Дегенмен, интервал элементінде $g_{00}(dx^0)^2,\ g_{0j}dx^0dx^j,\ g_{jk}dx^jdx^k$, және өрнектері бар екенін есте ұстаған жөн, мұнда $x^0=ct,\ x^1=r,\ x^2=\theta$ және $x^3=\varphi$, сондықтан

$$ds^2\sim\frac{1}{c^2}+O\left(\frac{1}{c^4}\right). \qquad (9)$$

Демек, Лагранж функциясы, Гамильтон функциясы, жалпыланған импульс, жылдамдық, орбиталық импульс және т.б. сияқты шамалар да 1PN жуықтауында $\sim\frac{1}{c^2}+O\left(\frac{1}{c^4}\right)$ болады. Толық мәліметтерді оқулықтарға [10], 1093-1094 беттерге және [11], 378-381 беттерге жүгінеміз. Осылайша, айналдыру эффектісі метриканың 1,5PN жуықтауында, яғни g_{0j} компонентінің $\frac{1}{c^3}$ жуықтауында пайда болады, бірақ интервал элементінде ол $cdtdx^j$ факторына байланысты 1PN жуықтауында пайда болады (мысалы: [12] беттерді қараңыз. 258-361, [13] 7-8 тараулар).

Қолданылған әдебиет

1. Fock V.A. 1964. The theory of space, time and gravitation. (Pergamon Press - Macmillan Company).
2. Stewart J. 1993. Advanced General Relativity (Cambridge University Press).
3. Boshkayev K.A., Suleymanova S.S., Zhami B.A., Taukenova A.S. and Aimuratov Y.K. 2015. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan (in Russ). 3. 43–48.
4. Ruiz E. 1986. General Relativity and Gravitation. 18. 805–81.
5. Abe M., Ichinose S. and Nakanishi N. 1987. Progress of Theoretical Physics. 78 1186–1201.
6. Liu Qh. 1998. Chinese Physics Letters. 15. 313–314.
7. Aguirregabiria J.M., Bel L., Martín J., Molina A. and Ruiz E. 2001. General Relativity and Gravitation. 33. 1809–1837.
8. Bičák J. and Katz J. 2005. Czechoslovak Journal of Physics. 55. 105–118.
9. Jiang C. and Lin W. 2014. General Relativity and Gravitation. 46. 1671.
10. Misner C.W., Thorne K.S. and Wheeler J.A. 1973. Gravitation (San Francisco: W.H. Freeman Press).
11. Poisson E. and Will C.M. 2014. Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic. (Cambridge University Press).
12. Landau L.D. and Lifshitz E.M. 1994. The classical theory of fields (Butterworth-Heinemann).
13. Brumberg V.A. 1972. Relativistic Celestial Mechanics. (Nauka).